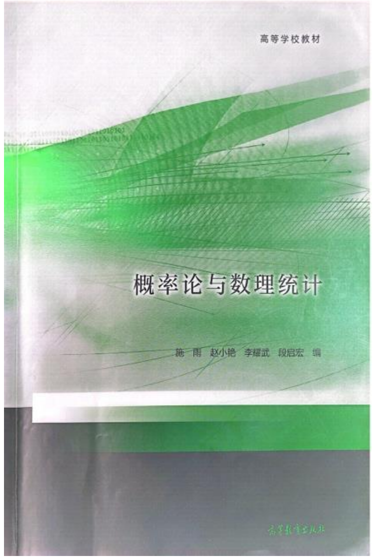
西安交通大学

第一章 随机事件与概率

人工智能学院
周三平
Email: spzhou@xjtu.edu.cn

§ 课程概况

《概率统计与随机过程》参考教材：



§ 课程概况

《概率统计与随机过程》教学组：

- **授课教师：** 周三平 副教授；左炜亮 副教授
- **课程助教：** 蔡嘉贤 **邮箱：** 952740438@qq.com
- **课程成绩：** 出勤（10%）+ 期中（30%）+ 期末（60%）

§ 概率论简史

- 研究和揭示随机现象数量规律的学科.
- 亦称赌博法，机遇论，猜测艺术等，它的思想可追溯自公元前220年以前的中国的一些文献. 不过真正的历史却只有三百来年而已.
- 如今，但凡要进行信息处理、决策制定、实验设计等等，只要涉及数据，必用概率统计的模型和方法. 例如，在经济、管理、工程、技术、物理、化学、生物、环境、天文、地理、卫生、教育、语言、国防等领域都有非常重要的应用.

§ 概率论简史

- **萌芽时期：** 1653年之前
  - 内容：赌博和占卜中的一些问题；
  - 工具：计数.

§ 概率论简史

- **诞生：** 1654年7月29日

➢ 这一天，法国的职业赌徒德·梅累（De Mere）向法国数学家帕斯卡（Pascal）提出了“分赌注问题”：甲、乙两赌徒下了赌注后对赌，其技巧相当，事先约定谁先赢得s局便算赢家而赢得所有赌注. 但在一人赢m局，另一人赢n局时因故中止了赌局($m, n < s$)，那么赌注应该如何分配才公平？

➢ 为了解决这一难题，Pascal与法国数学家费马（Fermat）通过书信进行讨论，深入细致地研究赌博中的数学问题，从而导致概率论的诞生！

§ 概率论简史

- 古典概率时期：1654-1811年
- 工具：排列组合、代数分析方法；
- 内容：离散型随机变量；
- 特征：直观具体，逻辑基础不严格；
- 主要工作：

帕斯卡（Pascal）与费马（Fermat）的7封通信，1654年7-10月；
惠更斯（Huygens），《论赌博中的计算》，1657年；
伯努利（Bernoulli），《猜度术》，1713年；
棣莫弗（de Moivre），《机会学说》，1718年；
贝叶斯（Thomas Bayes），逆概率思想.

§ 概率论简史

- **分析概率时期：** 1812-1932年
  - 工具：特征函数、微分方程、差分方程；
  - 内容：连续型随机变量；
  - 主要工作：

拉普拉斯（Laplace）——《分析概率论》，1812年，实现了由组合技巧向分析方法的过渡；

泊松（Poisson）—— 泊松分布，泊松定理，泊松大数定律；

圣彼得堡数学学派：切比雪夫（ Chebyshev ）， （马尔可夫） Markov, （李雅普诺夫）Liapunov ——对大数定律和中心极限定理的发展；

§ 概率论简史

- **现代概率时期：**1933年-至今
  - 工具：集合论和测度论
  - 标志:柯尔莫哥洛夫（Kolmogorov） 《概率论基础》
  - 意义：借助20世纪初完成的勒贝格（Lebesgue）测度和积分理论以及抽象测度和积分理论，建立了一套严密的概率公理体系，成为现代概率论的基础，使概率论成为严谨的数学分支.

§ 概率论简史

- **蓬勃发展：** 自1933年以来，在公理化的基础上，现代概率论不仅在理论上取得了一系列突破，在应用上也取得了巨大的成就，其应用几乎遍及所有的科学领域.

- 理论研究：极限理论，独立增量过程，马氏过程，平稳过程和时间序列，鞅和随机微分方程等.

- 应用领域：天气预报、地震预报、产品的抽样调查、经济最优决策、金融保险、通讯工程、服务系统、生物医学等.

§ 人工智能与概率统计

- **人工智能：** 是一种模拟人类思维能力、感知和判断过程的技术. 它利用计算机系统和算法来处理大量数据，并通过自主决策、预测和问题求解等方式执行任务. 人工智能分为弱人工智能和强人工智能. 弱人工智能指在特定领域内完成特定任务的人工智能，例如图像识别和语音识别等. 强人工智能则是指具有与人类智慧相同或更强大的智能水平的人工智能，目前还没有实现.

§ 人工智能与概率统计

人工智能中的目标检测与分割

§ 人工智能与概率统计

- **概率统计：**是一种数学方法，用于研究数据收集、分析和解释的科学. 它涉及到概率论、数理统计和实验设计等多个领域. 统计学可以帮助我们对大量数据进行分析和预测，从而做出正确的决策. 统计学的应用范围广泛，例如医学、心理学、商业和社会科学等领域.
- 概率统计有三种基本方式：**描述统计**、**推断统计**和**实验设计**. 其中，描述统计用于描述数据的特征和趋势，推断统计用于从样本数据推断总体数据的特征和趋势，实验设计则主要用于确定实验条件和样本大小等问题.

§ 人工智能与概率统计

- 首先，人工智能需要大量的数据和数学模型来进行分析和决策. 概率统计可以帮助人工智能处理这些数据，并使用这些数据来训练机器学习模型. 机器学习是一种让计算机通过学习数据来改善性能的技术. 这种学习过程类似于人类的学习过程，即从经验中学习.
- 概率统计也可以使用人工智能的技术来提高效率和精度. 例如，在数据分析中，我们可以使用机器学习算法来自动识别数据的模式和趋势. 这些技术可以帮助我们更好地理解数据的含义，并指导我们做出正确的决策.

本章主要内容

1.1 随机事件及运算

1.2 概率及性质

1.3 古典概型和几何概型

1.4 条件概率 事件的独立性

§1.1 随机事件及运算

1.1.1 确定性现象、随机性现象

自然界所观察到的现象：确定性现象、随机性现象

一. 确定性现象

在一定条件下必然发生的现象称为确定性现象

实例

“水从高处流向低处”，

“同性电荷必然互斥”，

“函数在间断点处不存在导数”等.

确定性现象的特征 条件完全决定结果.

§1.1 随机事件及运算

二. 随机性现象

在一定条件下可能出现也可能不出现的现象称为随机现象.

实例1 在相同条件下掷一枚均匀的硬币，观察正反两面出现的情况.

结果有可能：出现正面也可能出现反面.

实例2 抛掷一枚骰子，观察出现的点数.

结果有可能为:

1, 2, 3, 4, 5 或 6.

§1.1 随机事件及运算

实例3 从交大到北客站的乘车过程中，可能遇到的红灯数.

随机现象的特征　　**条件不能完全决定结果.**

说明

■ 随机现象揭示了条件和结果之间的非确定性联系，其数量关系无法用函数加以描述；

■ 随机现象在一次观察中出现什么结果具有偶然性，但在大量试验或观察中，这种结果的出现具有某种固有的统计规律性，概率论就是研究随机现象的统计规律性的一门数学学科.

§1.1 随机事件及运算

1.1.2 如何来研究随机现象

随机现象是通过随机试验来研究的，所谓试验就是按照一定的想法去做事情.

定义 （随机试验）将一切具有下面三个特点：

（1）在相同条件下可重复进行(可重复性)

（2）所有结果明确可知且不只一个(不确定性)

（3）实验之前并不知道会出现哪一个结果(不可预见性)

的试验或观察称为随机试验，简称为试验，常用E表示.

§1.1 随机事件及运算

实例4 几组典型的随机试验：

E_1：抛一枚硬币，观察正面、反面出现的情况.

E_2：将一枚硬币抛掷三次，观察正面H、反面T出现的情况.

E_3：将一枚硬币抛掷三次，观察出现正面的次数.

E_4：某人一天收到的微信条数.

E_5：在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命.

E_6：记录某地一昼夜的最高温度和最低温度.

§1.1 随机事件及运算

定义 （随机事件）在一次试验中，可能出现也可能不出现的事情（结果）为随机事件，简称为事件.

随机事件一般用大写英文字母A,B,C……等表示，例如：

- 在E_2中，“出现‘正反反(HTT)’”，“出现两次正面”“三次出现同一面”等都是随机事件，可依次记为A,B,C .
- 在E_5中，“灯泡的寿命超过1000小时”是一随机事件，我们可用D表示此事件.

§1.1 随机事件及运算

定义 （基本事件与复合事件）随机试验的每一个可能结果，是随机试验中最简单的随机事件，称为**基本事件**。由基本事件组成的事件称为**复合事件**，简称事件.

两个非平凡的事件：

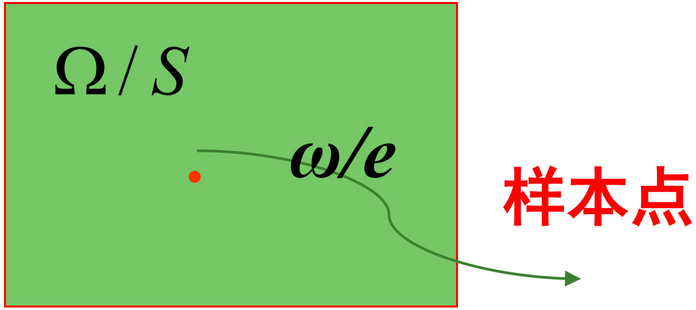
1. **不可能事件**：在试验中不可能出现的事情，记为ϕ.
   例如："掷一粒骰子掷出8点".

2. **必然事件**：在试验中必然出现的事情，记为Ω / S .
   例如："掷一粒骰子点数小于7".

§1.1 随机事件及运算

1.1.3 样本空间

现代集合论为表述随机试验提供了一个方便的工具.



把随机试验的每个可能结果称为**样本点**，记作ω/e；全体样本点的集合称为**样本空间**，记作Ω/S． 样本空间由试验的**内容**决定

例如：将一枚硬币抛掷两次观察正反面出现的情况，则样本空间：

$$\Omega=\{(\mathrm{H},\ \mathrm{H}),\ (\mathrm{H},\ \mathrm{T}),\ (\mathrm{T},\ \mathrm{H}),\ (\mathrm{T},\ \mathrm{T})\}$$

§1.1 随机事件及运算

实例5 写出E_1到E_2的样本空间：

E_1：抛一枚硬币，观察正面、反面出现的情况.

E_2：将一枚硬币抛掷三次，观察正面H、反面T出现的情况.

E_3：将一枚硬币抛掷三次，观察出现正面的次数.

E_4：某人一天收到的微信条数.

E_5：在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命.

E_6：记录某地一昼夜的最高温度和最低温度.

§1.1 随机事件及运算

实例5 写出E_1到E_2的样本空间：

Ω_1: $\{H, T\}$

Ω_2: $\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

Ω_3: $\{0, 1, 2, 3\}$

Ω_4: $\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$

Ω_5: $\{t \mid t \geq 0\}$

Ω_6: $\{(x, y) \mid T_0 \leq x \leq y \leq T_1\}$

§1.1 随机事件及运算

注意：

1. 试验不同，对应的样本空间不同.
2. 同一试验，若试验目的不同，则对应的样本空间也不同.
3. 试验的结果可以是数也可以不是数.

例如，对于同一试验：“将一枚硬币抛掷三次”.

若观察正面H、反面T 出现的情况，则样本空间为：

$$\Omega=\{HHH,\ HHT,\ HTH,\ THH,\ HTT,\ TTH,\ THT,\ TTT\}$$

若观察出现正面的次数，则样本空间为：

$$\Omega=\{0,1,\ 2,\ 3\}$$

§1.1 随机事件及运算

■ 建立样本空间, 事实上就是建立随机现象的数学模型. 因此一个样本空间可以概括许多内容大不相同的实际问题.

例如，只包含两个样本点的样本空间

$$\Omega = \{H, T\}$$

■ 它既可以作为抛掷硬币出现正面或出现反面的模型, 也可以作为产品检验中合格与不合格的模型，又能用于排队现象中有人排队与无人排队的模型等.

■ 在具体问题的研究中，描述随机现象的第一步就是建立样本空间.

§1.1 随机事件及运算

■ 引入样本空间后，事件便可以表示为样本点的集合，即为样本空间的某些子集.

例如，掷一颗骰子，观察出现的点数

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

事件B 表示出现奇数点，则

$$B = \{1,3,5\}$$

易见，B发生当且仅当B中的某个样本点出现.

§1.1 随机事件及运算

综上所述:

- 一个随机事件就是样本空间的一个子集.
- 基本事件—单点集，复合事件—多点集.
- 必然事件—样本空间.
- 不可能事件—空集.
- 一个随机事件发生，当且仅当该事件所包含的某个样本点出现.

§1.1 随机事件及运算

概率论与集合论有关概念的对应关系表

概率论	集合论	记号
样本点	元素	ω_i
样本空间	全集	Ω
随机事件	子集	A，B，C……
基本事件	单点集	$\{\omega_i\}$
不可能事件	空集	Φ

事件间的关系及运算，就是集合间的关系和运算.

§1.1 随机事件及运算

1.1.4 事件间的关系与运算

定义 （事件的包含与相等）

- 若事件A发生必然导致事件B发生，则称A包含于B或B包含A，记为$A\subset B$或$B\supset A$.
- 若$A\subset B$且$A\supset B$则称事件A与事件B相等，记为$A=B$.

定义 （和事件）

- “事件A与事件B至少有一个发生”是一事件，称此事件为事件A与事件B的和事件或并事件。记为$A\cup B$.
- 用集合表示为：$A\cup B=\{\omega|\,\omega\in A$或$\omega\in B\}$.

§1.1 随机事件及运算

■ 事件和的概念可推广至任意有限和及可列和的情况

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \triangleq \{A_1, A_2, \cdots, A_n \text{至少有一个发生}\}$$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \triangleq \{A_1, A_2, \cdots \text{至少有一个发生}\}$$

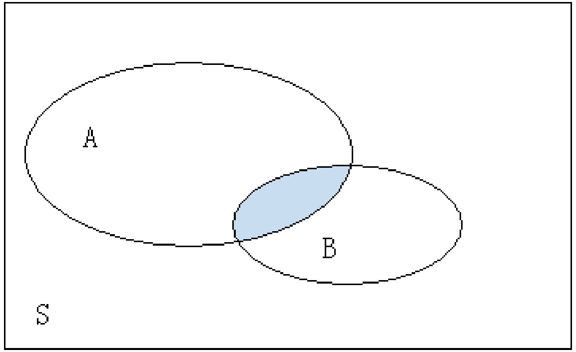
例如：袋中有5个白球，3个黑球，从中任取3个球，令A表示“取出的全是白球”，B表示“取出的全是黑球”，C表示“取出的球颜色相同”，则$C = A \cup B$.

若令$A_i(i=1,2,3)$表示“取出的3个球中恰有i个白球”,D表示“取出的3个球中至少有一个白球”，则$D = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

§1.1 随机事件及运算

定义 （积事件）

- 称“事件A与事件B同时发生”为A与B的**积事件或交事件**，记为A∩B或AB.
- 用集合表示为：AB={ω|ω∈A且ω∈B}.



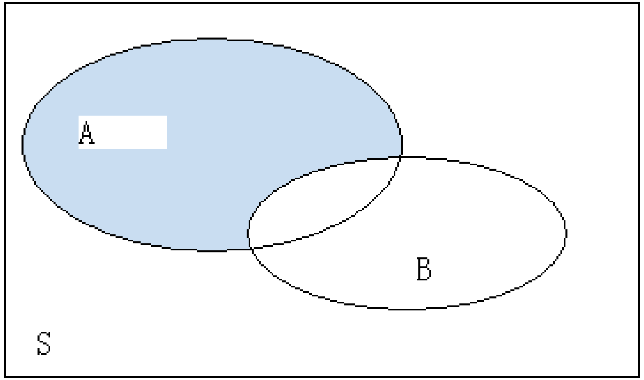
推广：
$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k \triangleq A_1 \bigcap A_2 \bigcap \cdots \bigcap A_n$$
$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \triangleq A_1 \bigcap A_2 \bigcap \cdots \bigcap A_n \bigcap \cdots$$

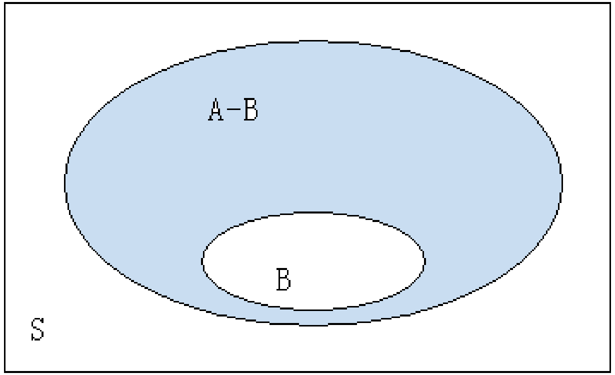
例如：在直角坐标系圆心在原点的单位圆内任取一点，记录其坐标，令 $A_n = \left\{(x,y) \mid x^2 + y^2 < \frac{1}{n^2}\right\}$，B表示取到(0,0)点，则
$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

§1.1 随机事件及运算

定义 （差事件）

- 称“事件A发生而事件B不发生”为事件A与事件B的差事件，记为A—B.
- 用集合表示为：$A-B=\{\omega \mid \omega \in A, \ \omega \notin B\}$.

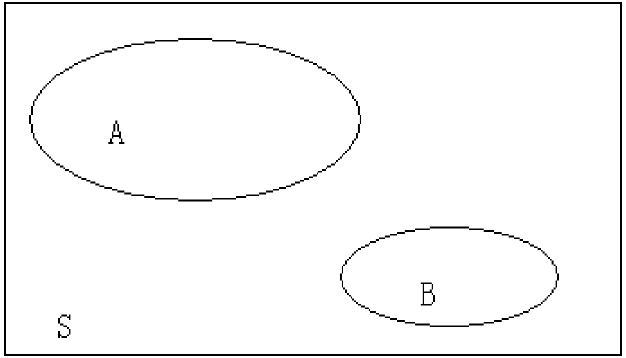




§1.1 随机事件及运算

定义 （互不相容事件或互斥事件）

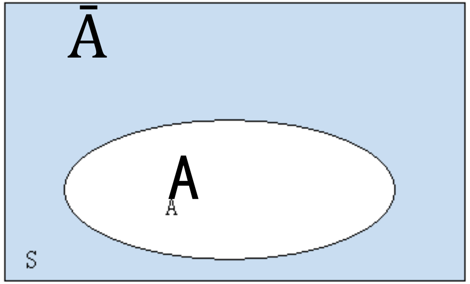
- 如果A，B两事件不能同时发生，即$AB=\Phi$ ，则称事件A与事件B是**互不相容事件**或**互斥事件**.



- 对有限个事件或可列个事件A_1，A_2，…，A_n …，如果对任意$i\neq j$，$A_i A_j=\Phi$，则称A_1，A_2，…，A_n**两两互斥**，或A_1，A_2，…，A_n …两两**互不相容**.

§1.1 随机事件及运算

定义 （逆事件或对立事件）



- 称“A不发生”为事件A的逆事件，记为$\bar{A}$.
- 易见A与$\bar{A}$满足：$A \cup \bar{A} = \Omega$ ，且$A\bar{A}=\Phi$.

定义 （差事件）

- A发生而B不发生称为A与B的差事件，记为$A - B = A\bar{B} = A - AB$.

§1.1 随机事件及运算

事件与集合的关系及运算对照

记号	概率论	集合论
$A \subset B$	事件A发生导致B也发生	A是B的子集
$A = B$	A与B相等	A与B相等
$AB = \varphi$	A与B不相容	A与B无公共元素
$\overline{A}$	A的对立事件	A的余集
$A \cup B$	A与B至少有一个发生	A与B的并集
$A \cap B$	A与B同时发生	A与B的交集
$A - B$	A发生而B不发生	A与B的差集

§1.1 随机事件及运算

1.1.4 事件的运算律

设A，B，C为事件，则有：

（1）交换律：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$

（2）结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C=A\cup B\cup C$

$A(BC)=(AB)C=ABC$

（3）分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)=AB\cup AC$

（4）德摩根律：$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$　$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$　（证明）

§1.1 随机事件及运算

实例6 甲、乙、丙三人各向目标射击一发子弹，用A、B、C分别表示甲、乙、丙命中目标，试用A、B、C表示下列事件：

解：

$A_1=\{\text{三人均命中目标}\}$ $\qquad ABC$

$A_2=\{\text{三人均未命中目标}\}$ $\qquad \bar{A}\bar{B}\bar{C}$

$A_3=\{\text{至少有一人命中目标}\}$ $\qquad A\cup B\cup C$

$A_4=\{\text{恰好有一人命中目标}\}$ $\qquad A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$

$A_5=\{\text{最多有一人命中目标}\}$ $\qquad \bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}$

$A_6=\{\text{至少有两人命中目标}\}$ $\qquad AB\cup BC\cup AC$

$A_7=\{\text{恰好有两人命中目标}\}$ $\qquad AB\bar{C}\cup\bar{A}BC\cup A\bar{B}C$

$A_8=\{\text{最多有两人命中目标}\}$ $\qquad \overline{ABC}$

小结

随机现象 → 随机试验 → 随机事件 → 事件运算

随机现象
- ↑ **确定现象**
- ↓ **条件不能完全决定结果**

随机试验
- ↑ **样本空间**
- ↓ **重复性**
  明确性
  随机性

随机事件
- ↓ **样本空间的子集合**

事件运算
- ↑ **四大定律**
  交换律、结合律
  分配律
  德摩根对偶律
- ↓ **七种关系**
  包含关系、相等关系、和事件、积事件、互斥关系、差事件、逆事件

如何去度量事件发生的可能性大小？

§1.2 概率的定义

研究随机现象，不仅关心试验中会出现哪些事件，更重要的是想知道事件出现的可能性大小，也就是

事件的概率

事件A的概率(probability of A)记为P(A)

§1.2 概率的定义

1.2.1 频率的定义

在相同的条件下进行了 n 次重复试验，记n_A 是随机事件 A 发生的次数（又称频数），则定义随机事件 A 发生的频率为

$$f_n(A) = n_A / n$$

频率描述了一个随机事件发生的频繁程度.

§1.2 概率的定义

频率的性质：

(1) (非负有界) $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；

(2) (规范性) $f_n(\Omega) = 1$；

(3) (有限可加) 如果 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 两两互不相容，则：

$$f_n(A_1+A_2+\cdots+A_m) = f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdot\cdot\cdot+f_n(A_m)$$

§1.2 频率的定义

大量的随机试验表明：

(1) 频率具有**随机波动性**，即对于同一个随机事件来说，在相同的试验次数下，得到的频率也不一定会相同.

(2) 频率还具有**稳定性**，总是在某一个具体数值附近波动，随着试验次数的不断增加，频率的波动会越来越小，逐渐稳定在这个数值.

称为是统计规律(大量试验下体现出的规律).

§1.2 概率的定义

实例1 抛硬币出现正面的频率.

试验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

§1.2 概率的定义

实例2 历史上著名的投掷硬币试验.

表 1.1 历史上投掷硬币试验的记录

试验者	投掷次数 (n)	正面次数 (r_n)	正面频率 $\left(\frac{r_n}{n}\right)$
De Morgan	2 048	1 061	0.5181
Buffon	4 040	2 048	0.5069
Pearson K	12 000	6 019	0.5016
Pearson K	24 000	12 012	0.5005

高尔顿钉板试验

§1.2 概率的定义

频率的稳定性说明：随机事件发生的可能性大小是随机事件本身固有的、不随人们意志改变的一种客观属性，因此可以对它进行度量.

随机事件A发生的可能性大小的度量，称为A发生的**概率**(probability)，记作P(A).

概率 $\xrightarrow{\text{表现}}$ 频率

§1.2 概率的定义

1.2.2 概率的统计定义

问题1：能否直接用$f_n(A)$ 作为$P(A)$？

不能

$P(A)$： 客观，与试验无关

$f_n(A)$：与试验有关——波动性

问题2：能否借助$f_n(A)$ 得到$P(A)$？如何得到？

可以

$f_n(A)$的统计规律性

§1.2 概率的定义

1.2.2 概率的统计定义

历史上有人做过试验：抛掷匀质硬币时，出现正反面的机会均等．设事件A为一次试验出现正面：

实验者	n	n_A	$f_n(A)$
De Morgan	2048	1061	0.5181
Buffon	4040	2048	0.5069
K.Pearson	12000	6019	0.5016
K.Pearson	24000	12012	0.5005

随着试验次数增加，$f_n(A) \longrightarrow 0.5$。

频率的这种“稳定性”就是所说的统计规律性.

§1.2 概率的定义

1.2.2 概率的统计定义

自然地，可以采用一个随机事件的频率的稳定值去描述它在一次试验中发生的可能性大小，即用频率的极限来作为概率的定义，称为**概率的统计定义**.

统计概率的特性:

1. 直观,易于理解,生活中比比皆是;
2. 大量重复试验的局限性,只能得到近似值;
3. 用现象定义本质,未抓住概率本质.

§1.2 概率的定义

1.2.2 概率的统计定义

自然地，可以采用一个随机事件的频率的稳定值去描述它在一次试验中发生的可能性大小，即用频率的极限来作为概率的定义，称为**概率的统计定义**.

定义（统计定义）：设试验E在相同条件下重复进行n次，事件A发生的频率稳定地在某一常数p附近摆动，则称p事件A的概率，记为：

$$P(A)=p$$

§1.2 概率的定义

1.2.2 概率的统计定义

优点：

适用面广：不要求试验具备有限性和等可能性.

直观易懂：　用频率近似代替概率.

检验方法：　用于检验理论或假说的正确性.

缺点：

试验次数要足够多.

不精确.

§1.2 概率的定义

1.2.3 概率的公理化定义

1 **非负性：** 对于每一个事件A，有$P(A)\geq 0$；

2 **规范性：** 对于必然事件Ω，有 $P(\Omega)=1$；

3 **可列可加性：** 设A_1，A_2，… 是两两互不相容的事件，即对于 $i\neq j, A_iA_j=\Phi, i,j=1,2,\cdots$，则有：

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$$

§1.2 概率的定义

1.2.3 概率的性质

1. 性质1 $P(\emptyset)=0$
2. 性质2（概率的加法定理） 若A_1，A_2，…，A_n是两两互斥的事件，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

3. 性质3 设A，B是两个事件，若$A \subseteq B$，则有

$$P(B-A) = P(B) - P(A)$$

$$P(B) \geq P(A)$$

4. 性质4 对任一事件A，有

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

§1.2 概率的定义

1.2.3 概率的性质

5. **性质5** 对于任意两个事件A，B，有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

6. **性质6** 设 $\{A_n, \ n = 1,2, \ \dots\}$ 为事件列，若 $A_n \subset A_{n+1}$，n=1, 2, …，令 $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$，则

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

推论： 设 $\{A_n, \ n = 1,2, \ \dots\}$ 为事件列，若 $A_n \supset A_{n+1}$，n=1, 2, …，令 $A = \cap_{i=1}^{\infty} A_i$，则

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

例1.7 从n双不同的手套中任取$2k(2k<n)$只，求下列事件概率：

A={恰有两只手套配成一双}

B={至少有两只手套配成一双}

解： 从n双手套中取2只,不同的取法总数为C_{2n}^{2k},有利于事件A的取法可分步完成:

第一步,从n双手套中取出一双作为配对的那两只手套,有C_n^1种取法;第二步,从剩下的n-1双手套中取出 $2k$-2双手套,有C_{n-1}^{2k-2}种取法;第三步,从这不同的不$2k$-2双手套中各选一只手套,因可取左或右,故有$2^{2(k-1)}$种取法,因此,有利于事件A的概率为

$$P(A)=\frac{C_n^1 C_{n-1}^{2k-2} 2^{2(k-1)}}{C_{2n}^{2k}}$$

因为有利于$\overline{B}$的取法为$C_n^{2k}2^{2k}$，所以事件B的概率为

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{C_n^{2k}2^{2k}}{C_{2n}^{2k}}$$

例题1.8 在整数1, 2, ···, 1000中随机地取一个数，问取到的整数能被4整除或者能被6整除的概率是多少？

解 设A={取到的数能被4整除}，B={取到的数能被6整除}，则所求的概率为

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

现在不同的取法总数为$C_{1000}^{1}=1000$

有利于事件A的取法有 $\left[\frac{1000}{4}\right]=250$ （[ ]向上取整符号）

有利于事件B的取法有 $\left[\frac{1000}{6}\right]=166$

（续）又因为一个数能同时被4与6整除，就相当于它能被4与6的最小公倍数12整除，所以有利于事件AB的取法有 $\left[\frac{1000}{12}\right]=83$

即 $P(A)=\frac{250}{1000}$, $P(B)=\frac{166}{1000}$, $P(AB)=$

于是所求概率为

$$P(A\cup B)=\frac{250+166-83}{1000}=0.333$$

本例表明对于复杂的随机事件，可以通过转化为相对简单的随机事件，用概率的性质计算原概率

§1.3 古典概型和几何概型

1.3.1 古典概型

定义 （古典概型）若试验E满足：

（1）有限样本空间：样本点总数有限，即：

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n\}$$

（2）等可能性：各基本事件发生的可能性相同.

$$P(\{\omega_i\})=\frac{1}{n},\ i=1,\dots,n,$$

则称试验E为古典概型（或有限等可能概型）.

§1.3 古典概型和几何概型

1.3.1 古典概型

古典概率的性质：

(1) $0 \le P(A) \le 1$；

(2) $P(\Omega)=1$； $P(\varnothing)=0$

(3) 若$AB=\varnothing$，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

一般 若$A_iA_j=\varnothing$，$(i\neq j)$, 则 $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

§1.3 古典概型和几何概型

求古典概率的问题实际上就是计数问题.

计算要点:

1、确定样本点并计算其总数;

2、计算事件所含样本点数.

排列组合是计算古典概率的重要工具

§1.3 古典概型和几何概型

古典概率的计算公式:

$$P(A) = \frac{\text{随机事件}\,A\,\text{包含的样本点个数}}{\text{样本空间}\,\Omega\,\text{包含的样本点总数}}$$

注意：古典概率问题中构造样本空间时必须保证每个样本点是等可能发生的.

例：抛均匀硬币三次，计算P｛恰好出现一次正面｝.

Ω_1={ HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT }, 因此 P(A) = 3/8 ;

Ω_2 ={ 0, 1, 2, 3 }, 因此 P(A) = 1/4 ?

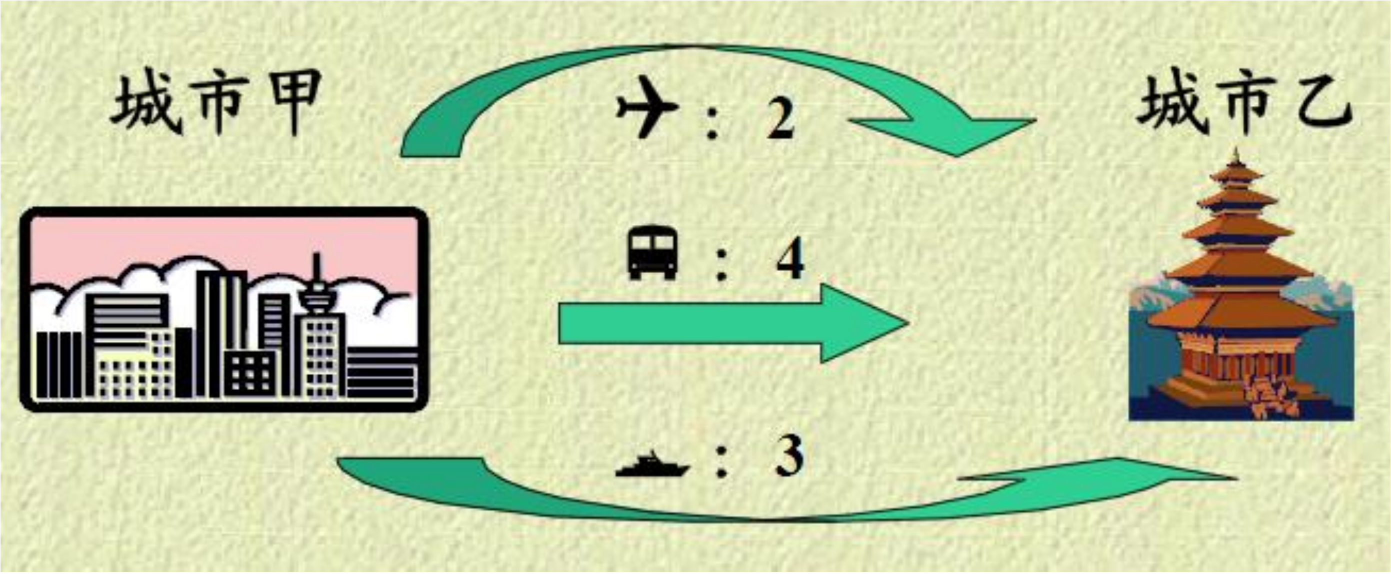
§1.3 古典概型和几何概型

1.3.2 加法原理与乘法原理

加法原理: 假设做一件事情可采用 A 或 B 两类不同方式，B 方式有 m 种不同的方法可以完成这件事。A 方式有 n 种不同的方法可以完成这件事，则完成这件事情一共有 $n+m$ 种不同的方法.

类似地，如果有若干类方式，就把所有方式的各种方法全部相加.

§1.3 古典概型和几何概型



根据加法原理，从甲城市到乙城市一共有 2+4+3=9条线路

§1.3 古典概型和几何概型

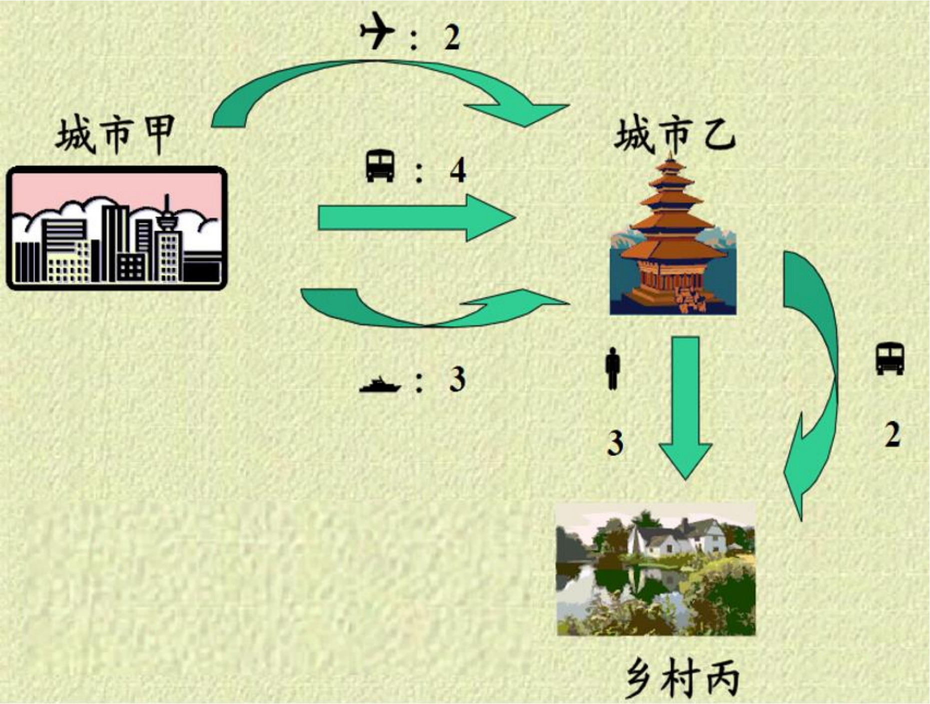
1.3.2 加法原理与乘法原理

乘法原理: 假设做一件事情必须经过 A 与 B 两个不同步骤，步骤 A 包含了 n 种不同的方法，步骤 B 包含m 种不同的方法，完成这件事情一共有 $n \times m$ 种不同方法.

类似地，如果有若干个步骤，就把所有步骤的各种方法全部相乘.

§1.3 古典概型和几何概型

根据加法原理和乘法原理，从甲城市到丙乡村一共有（2+4+3）×（3+2）= 45条线路



§1.3 古典概型和几何概型

实例3 设有N件产品，其中有D件次品，今从中任取n件，问其中恰有$k(k \le D)$件次品的概率是多少？

解： 在N件产品中抽取n件的所有可能取法共有C_N^n种，在N件产品中抽取n件，其中恰有k件次品的取法共有$C_D^k C_{N-D}^{n-k}$种，因此所求的概率为：

$$p = \frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$$

这是无放回一次取球模型.

§1.3 古典概型和几何概型

实例4 由10, 11, ⋯, 99中任取一个两位数，求这个数能被2或3整除的概率?

解 设A ={这个数能被2整除}，B ={这个数能被3整除}，则

$A \cup B$ ={这个数能被2或3整除}，

AB ={这个数能被2和3同时整除}，

10到99中的两位数有90个，其中能被2整除的有45个能被3整除的有30个，而能被6整除的有15个. 故

$$P(A)=45/90,\ P(B)=30/90,\ P(AB)=15/90.$$

由概率的加法公式得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=2/3.$$

§1.3 古典概型和几何概型

实例5 将n个质点随机的落入N(≥n)个格子中，求下列事件的概率：

A={某指定的n个格子中各有一个质点}

B={任意n个格子中各有一个质点}

C={某指定格子恰有k(k ≤ n)个质点}

解： n个质点随机的落入N(≥n)个格子中；由于每一个质点都可以落入到N个格子中的任意一个中，所以n个质点落到N个格子去共有 N^n种方法.

(1)将n个质点落入某指定的n个格子中，每个格子中各有一个质点，共有$n!$种方法，故

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}$$

§1.3 古典概型和几何概型

(2) 事件B的完成要分两步:第一步,从从N个格子中任意指定出n个格子,这种选法共有C_N^n种;第二步,对于选定的n个格子每个格子中各有一个质点,共有$n!$种方法,故"任意n个格子中各有一个质点"的落入方法共有$C_N^n\times n!$.因此

$$P(B)=\frac{C_N^n\times n!}{N^N}$$

(3) 由于某指定格子分配k个质点的分法有C_n^k种,而其余$n-k$个质点任意分配到$N-1$个格子的分法有$(N-1)^{n-k}$种,所以C中包含的样本点数为$C_n^k\times(N-1)^{n-k}$.因此

$$P(C)=\frac{C_n^k\times(N-1)^{n-k}}{N^r}$$

§1.3 古典概型和几何概型

1.3.3 几何概型

有时，试验的可能结果是某区域中的 一个点，这个区域可以是一维的，也可以是二维的，还可以是 n 维的，这时不管是可能结果全体，还是我们感兴趣的结果都是无限的.

此时，等可能性可以通过下列方式来赋予意义：落在某区域 g 的概率与区域的“几何度量” $m(g)$ （长度、面积、体积等）成正比并且与其位置和形状无关. 这种区域的度量统称为“勒贝格（Lebesgue）测度”．

§1.3 古典概型和几何概型

1.3.3 几何概型

定义 （几何概型）若以 A_g 记“在区域Ω 中随机的取一点，而该点落在区域 g 中”这一事件，则其概率定义为：

$$P(A_g)=\frac{m(g)}{m(\Omega)}.$$

§1.3 古典概型和几何概型

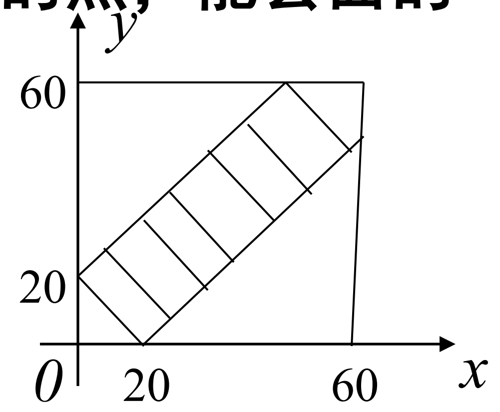
实例3（会面问题）两人相约7点到8点在某地会面，先到者等候20分钟，这时就可离去，试求这两人能会面的概率.

解： 以x, y 表示两人到达的时刻，则会面的充要条件为：

$$|x-y| \le 20.$$

可能的结果全体是边长为60的正方形中的点，能会面的点的区域用阴影标出，故所求的概率为

$$p = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{5}{9}$$



实际上，我们假定了两人到达的时间在7点到8点之间的机会均等且互不影响.

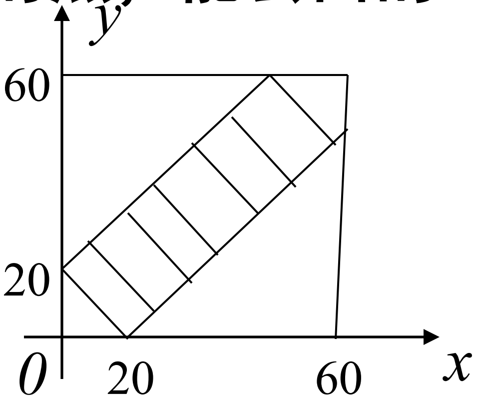
§1.3 古典概型和几何概型

实例4（会面问题）两人相约7点到8点在某地会面，先到者等候20分钟，这时就可离去，试求这两人能会面的概率.

解：以x, y 表示两人到达的时刻，则会面的充要条件为：

$$|x-y| \le 20.$$

可能的结果全体是边长为60的正方形中的点，能会面的点的区域用阴影标出，故所求的概率为



$$p = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{5}{9}$$

实际上，我们假定了两人到达的时间在7点到8点之间的机会均等且互不影响.

§1.3 古典概型和几何概型

几何概型在现代概率概念的发展中曾经起过重大作用. 19世纪时，不少人相信，只要找到适当的等可能性描述，就可以给概率问题以唯一的解答，然而有人却构造出这样的例子，它包含着几种似乎都同样有理却相互矛盾的答案. 下面就是一个著名的例子.

贝特朗(Bertrand)奇论 在半径为1的圆内随机地取一弦，求其长超过该圆内接等边三角形的边长$\sqrt{3}$ 的概率.

§1.3 古典概型和几何概型

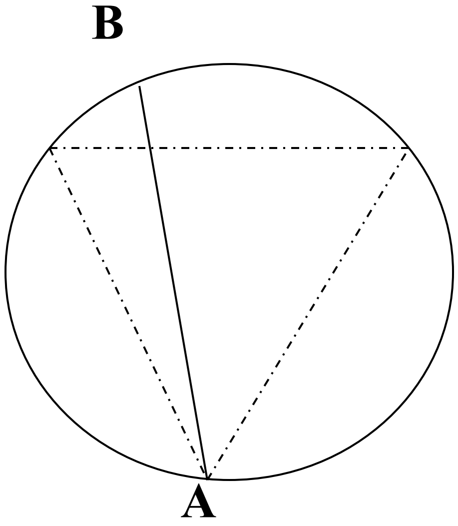
几何概型在现代概率概念的发展中曾经起过重大作用. 19世纪时，不少人相信，只要找到适当的等可能性描述，就可以给概率问题以唯一的解答，然而有人却构造出这样的例子，它包含着几种似乎都同样有理却相互矛盾的答案. 下面就是一个著名的例子.

贝特朗(Bertrand)奇论 在半径为1的圆内随机地取一弦，求其长超过该圆内接等边三角形的边长$\sqrt{3}$ 的概率.

§1.3 古典概型和几何概型

【解法一】

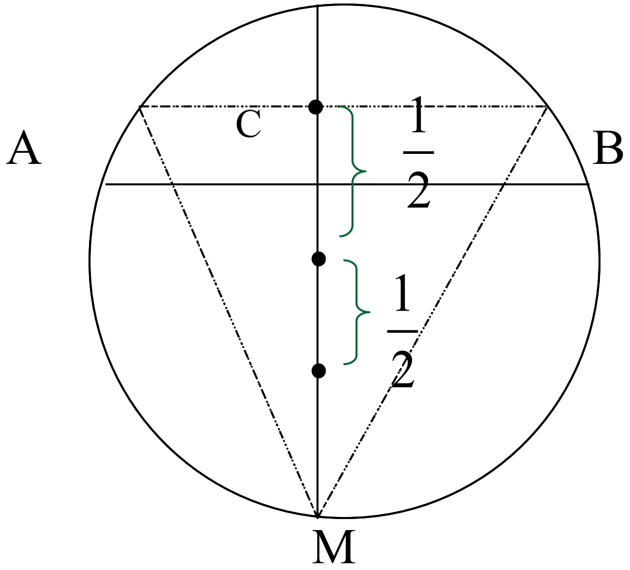
任何弦交圆周两点，不失一般性，先固定其中一点于圆周上，以此点为顶点作等边三角形，显然只有落入此三角形内的弦才满足要求，这种弦的弧长为整个圆周的 1/3，故所求的概率为1/3 .



§1.3 古典概型和几何概型

【解法二】

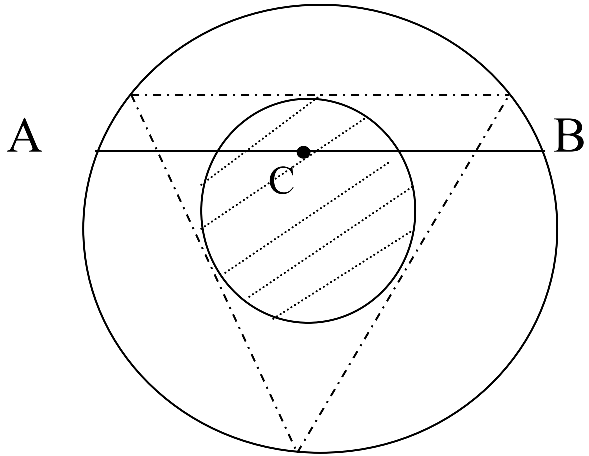
弦长只跟它与圆心的距离有关，而与方向无关，因此可以假定它垂直于某一条直径，当且仅当它与圆心的距离小于$1/2$时，其长才大于$\sqrt{3}$，因此所求的概率为$1/2$.



§1.3 古典概型和几何概型

【解法三】

弦被其中点唯一确定，当且仅当其中点属于半径为$1/2$的同心圆时，弦长才大于$\sqrt{3}$，此小圆面积为大圆面积的$1/4$，故所求的概率为$1/4$.



§1.3 古典概型和几何概型

同一问题有三种不同的答案，细究其原因，发现是在取弦时采用了不同的等可能性假定. 在第一种解法中，假定端点在圆周上均匀分布，在第二种解法中，假定弦的中点在直径上均匀分布，而在第三种解法中，又假定弦的中点在圆内均匀分布. 这三种答案针对三种不同的随机试验，对于各自的随机试验而言，它们都是正确的.

因此在使用术语“随机”、“等可能”、“均匀分布”等时，应明确指明其含义，这又因试验而异.

§1.3 古典概型和几何概型

几何概率的性质：

(1) 非负性：对任一事件A，有 $0 \le P(A) \le 1.$

(2) 规范性：对必然事件Ω, 有 $P(\Omega) = 1.$

(3) 可列可加性：若事件A_1，A_2，$\cdots$，两两互不相容, 则：

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

小结

随机现象 → 随机试验 → 随机事件 → 事件运算 → 度量？

确定现象

条件不能完全决定结果

样本空间

重复性
明确性
随机性

样本空间的子集合

四大定律
交换律、结合律
分配律
德摩根对偶律

七种关系
包含关系、相等关系、和事件、积事件、互斥关系、差事件、逆事件

小结

概率的性质：六大性质+一个推论

随机波动性 ↑ 统计定义 ↓ 稳定性

非负性、规范性 ↑ 公理化定义 ↓ 可列可加性

有限性 ↑ 古典概型 ↓ 等可能性

几何概型 ↓ 等可能性

统计定义 → 公理化定义 → 古典概型 → 几何概型

§1.4 条件概率 事件的独立性

1.4.1 条件概率

条件概率的直观定义:

某个事件发生的可能性大小经常会受到另一相关事件发生与否的影响. 若在事件B已发生的条件下，事件A发生的概率为p，则称p为在已知B发生的条件下A发生的条件概率，记为 $P(A|B)$.

§1.4 条件概率 事件的独立性

1.4.1 条件概率

问题的提出：

1） 10个人摸彩，有3张中彩.

问：第1个人中彩的概率为多少？

第2个人中彩的概率为多少？

2）10个人摸彩，有3张中彩.

问：已知第1个人没摸中，

第2个人中彩的概率为多少？

§1.4 条件概率 事件的独立性

1.4.1 条件概率

案例 1 假定生男生女是等可能. 若已知某一个家庭有俩孩子, 求这个家庭有一个男孩，一个女孩的概率；若已知这个家庭至少一个女孩，求这家有一个男孩，一个女孩的概率.

解： 设A表示“这个家庭有一个男孩，一个女孩”；

B表示“这个家庭至少一个女孩” .

于是，所求概率分别 $P(A), P(A|B)$.

§1.4 条件概率 事件的独立性

1.4.1 条件概率

由题意知样本空间和事件分别可表示为

$$\Omega=\{(男,男),(男,女),(女,男),(女,女)\}$$
$$A=\{(男,女),(女,男)\}$$
$$B=\{(男,女),(女,男),(女,女)\}$$

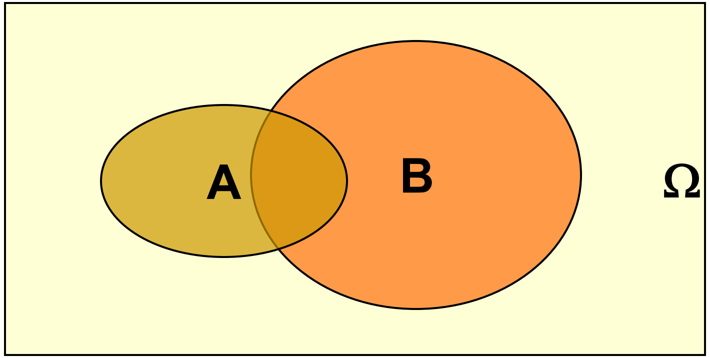
所以有 $P(A)=\dfrac{1}{2}, P(A|B)=\dfrac{2}{3}$

§1.4 条件概率 事件的独立性

1.4.1 条件概率

注意，求解案例1中$P(A|B)$过程可进行如下转换：

$$P(A|B)=\frac{2}{3}=\frac{2/4}{3/4}=\frac{P(AB)}{P(B)}$$



§1.4 条件概率 事件的独立性

1.4.1 条件概率

定义（条件概率）：设（Ω, F, P）是一个概率空间，B$\in$F，且P(B)>0，则

对任意A$\in$F，记
$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)},$$

称P(A|B)为已知事件B发生的条件下，事件A发生的条件概率.

以后，若出现条件概率P(A|B)时，都假定P(B)>0.

§1.4 条件概率 事件的独立性

1.4.1 条件概率

案例2 体检发现，某地区自然人群中，每10万人内平均有40人患原发性肝癌，有34人甲胎球蛋白含量高，有32人患原发性肝癌又出现甲胎球蛋白含量高。现从这一地区随机抽查一人，发现其甲胎球蛋白量高，求其患原发性肝癌的概率有多大？若在这个人群中，已知一人患原发性肝癌，求该人甲胎球蛋白含量高的概率？

§1.4 条件概率 事件的独立性

1.4.1 条件概率

1. 现从这一地区随机抽查一人，发现其甲胎球蛋白量高，求其患原发性肝癌的概率有多大

2. 若在这个人群中，已知一人患原发性肝癌，求该人甲胎球蛋白含量高的概率

解：设A表示“所抽人患原发性肝癌”

B表示“所抽人甲球蛋白含量高”

于是，所求概率分别为$P(A|B),P(B|A)$

由题设知

$$P(A)=0.0004, P(B)=0.00034, P(AB)=0.00032$$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=0.9412,\ P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=0.8$$

§1.4 条件概率 事件的独立性

1.4.1 条件概率

条件概率P(A|B)满足概率的三条公理，以及其他一切性质，例如

(1) $P(A|B) \geq 0$

(2) $P(\Omega|B) = 1$

(3) $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \mid B)$

(4) $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$

(5) $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(AB|C)$

§1.4 条件概率 事件的独立性

注 意 点

$P(\Omega|B) = 1$;　　　　$P(B|\Omega) \neq 1$;

$P(A|\Omega) = P(A)$;　　　　$P(A|A) = 1$.

$P(A|\bar{B}) \cancel{=} P(\bar{A}|B)$　　　　$P(A|\bar{B}) \cancel{=} 1 - P(A|B)$

一般总有$P(A|B) \geq P(AB)$成立，但$P(A|B)$与$P(A)$不可比.

§1.4 条件概率 事件的独立性

条件概率的三大公式

- 乘法公式；
- 全概率公式；
- 贝叶斯公式.

§1.4 条件概率 事件的独立性

1.4.2 乘法公式

(1)若 $P(B)>0$，则$P(AB)=P(B)P(A|B)$；

若 $P(A)>0$，则$P(AB)=P(A)P(B|A)$.

(2) 若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则 $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$

注意：n个事件的概率乘法公式并不只有上面这种形式。事实上，对于n个事件，这样形式的公式一定有n！个.

§1.4 条件概率 事件的独立性

1.4.2 乘法公式

乘法公式主要用于求几个事件同时发生的概率.

案例3 一批零件共有100个，其中10个不合格品。从中一个一个不返回取出，求第三次才取出不合格品的概率.

解： 记 A_i= “第i次取出的是不合格品” B_i= “第i次取出的是合格品”， 目的求 $P(B_1B_2A_3)$.

用乘法公式

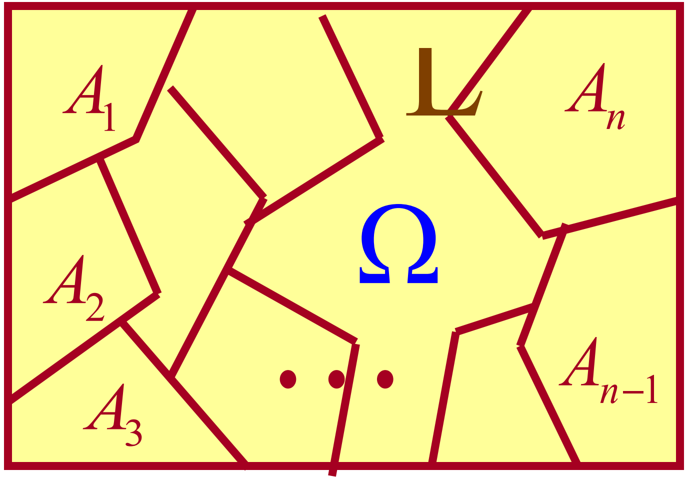
$$P(B_1B_2A_3)=P(B_1)P(B_2|B_1)P(A_3|B_1B_2)$$

$$=\frac{90}{100}\times\frac{89}{99}\times\frac{10}{98}.$$

§1.4 条件概率 事件的独立性

1.4.3 全概率公式

若 $A_1, A_2, \cdots$ 两两互不相容, 且 $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$,则称 $A_1, A_2, \cdots$ 为 Ω 的一个分割, 亦称完备事件组.



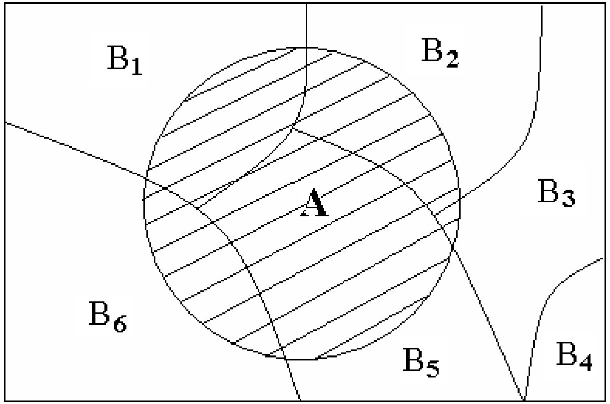
§1.4 条件概率 事件的独立性

1.4.3 全概率公式

全概率公式： 若事件 A_1，A_2，… 是样本空间Ω的一组分割，且 $P(A_i)>0$，则

$$B=\sum_{i=1}^{\infty} BA_i,$$

$$P(B)=\sum_{i=1}^{\infty} P(BA_i)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)P(B|A_i).$$



§1.4 条件概率 事件的独立性

- 全概率公式用于求复杂事件的概率. 公式中的B是较复杂事件，A_i是引起B发生的各原因、情况或途径.

- 使用全概率公式关键在于寻找另一组事件来“分割”样本空间.

- 全空间可以由有限个A_i来分割, 即$A_1, A_2, \cdots, A_n$

- 全概率公式最简单的形式:

§1.4 条件概率 事件的独立性

案例4 设播种用小麦种子中混有一等，二等，三等，四等四个等级的种子，分别各占95.5%，2%，1.5%，1%，用一等，二等，三等， 四等种子长出的穗含50颗以上麦粒的概率分别为 0.5，0.15，0.10，0.05，求这批种子所结的穗含有50颗以上麦粒的概率.

解： 设从这批种子中任选一颗是一等，二等，三等，四等种子的事件分别是 A_1, A_2, A_3, A_4，则它们构成完备事件组，又设B表示任选一颗种子所结的穗含有50粒以上麦粒这一事件，于是，由题设条件有

$$P(A_1)=95.5\% \quad P(A_2)=2\% \quad P(A_3)=1.5\% \quad P(A_4)=1\%$$

$$P(B|A_1)=0.5 \quad P(B|A_2)=0.15$$

$$P(B|A_3)=0.10 \quad P(B|A_4)=0.05$$

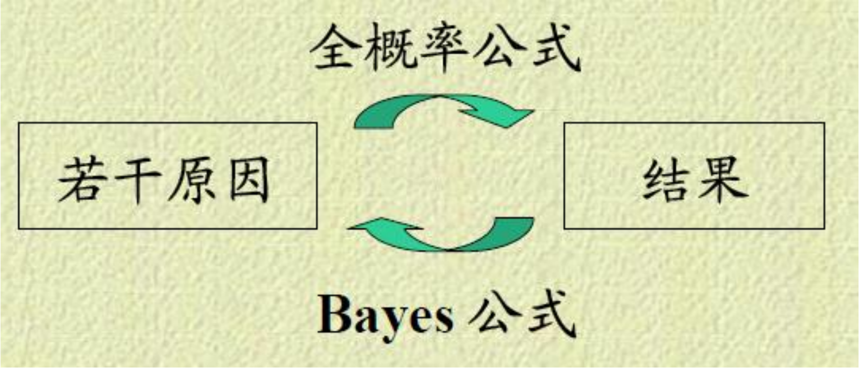
则由全概率公式：

$$P(B)=\sum_{i=1}^{4} P(A_i)P(B|A_i)=0.4825$$

§1.4 条件概率 事件的独立性

1.4.4 贝叶斯公式

- 乘法公式是求“几个事件同时发生”的概率；
- 全概率公式是求“结果”的概率；
- 贝叶斯公式是已知“结果” ，求“原因”的概率.



§1.4 条件概率 事件的独立性

1.4.4 贝叶斯公式

贝叶斯(Bayes)公式： 若事件 A_1，A_2，… 是样本空间Ω的一组分割，且 P(B)>0，则

用乘法公式

$$P(A_i\mid B)=\frac{P(A_iB)}{P(B)}=\frac{P(A_i)P(B\mid A_i)}{P(B)}$$

$$=\frac{P(A_i)P(B\mid A_i)}{\sum_{j=1}^{\infty}P(A_j)P(B\mid A_j)}$$

用全概率公式

§1.4 条件概率 事件的独立性

Bayes公式是英国统计学家Bayes于1763年首先提出的,是先验概率与后验概率转化工具.

经过多年的发展和完善，Bayes公式以及由此发展起来的一整套理论与方法，已经形成为概率统计中的**贝叶斯统计**.

Bayes公式的意义:

先验概率

当不知道某信息(事件B)时，我们对各事件A_1，A_2，…发生的可能性大小的认识为:$P(A_1)$,$P(A_2)$,… .

当知道某信息(事件B)已经发生时，我们对各事件A_1，A_2，…发生的可能性大小要重新认识：$P(A_1|B)$，$P(A_2|B)$，… .

后验概率

§1.4 条件概率 事件的独立性

案例5 假定用血清甲胎球蛋诊断肝癌：P(阳性|患者)= 0.95，P(阴性|健康者)= 0.90；已知自然人群中，P（患者）=0.0004。现随机抽查一人，血清甲胎球蛋诊断结果为阳性，求其患肝癌的概率有多大？

解： 记A:诊断结果阳性，C:的确患有肝癌，则

$$P(C)=0.0004,\ P(A|C)=0.95,\ P(\bar{A}|\bar{C})=0.90$$

$$P(C\mid A)=\frac{P(C)P(A|C)}{P(C)P(A|C)+P(\bar{C})P(A|\bar{C})}$$

$$=\frac{0.0004\times0.95}{0.0004\times0.95+0.9996\times0.1}=0.0038$$

Why?

§1.4 条件概率 事件的独立性

过去的经验或知识 P(C) = 0.0004 (先验概率)	+	新信息 A	⇒	修正过去认识 P(C|A) = 0.0038 (后验概率)

后验概率小关键原因在于先验概率（人群中感染比例）非常小.

如果我们的检查对象是一个肝癌可疑人群，比如甲胎球蛋白量高者，其先验概率提高为例1中的0.9412，则

$$P(C\mid A)=\frac{P(C)P(A|C)}{P(C)P(A|C)+P(\bar{C})P(A|\bar{C})}$$

$$=\frac{0.9412\times0.95}{0.9412\times0.95+0.0588\times0.1}=0.9935$$

§1.4 条件概率 事件的独立性

1.4.4 事件的独立性

两个事件独立性 直观说法，对于两事件，若其中任何一个事件的发生**不影响**另一个事件发生的概率，则这两事件是**独立的**.

$$\Leftrightarrow \; P(A|B)=P(A)$$

$$\Leftrightarrow \; P(AB)/P(B)=P(A)$$

$$\Leftrightarrow \; P(AB)=P(A)P(B)$$

§1.4 条件概率 事件的独立性

1.4.4 事件的独立性

定义 （两个事件独立性） 若两事件A与B满足

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称A与B是**统计独立**的，简称A与B**独立**.

<u>推论1</u> 若事件A, B独立, 且P(B)>0, 则 $P(A|B)=P(A)$.

<u>推论2</u> 若事件A与B独立，则A与$\bar{B}$独立、$\bar{A}$与B独立，$\bar{A}$与$\bar{B}$独立.

注意：

① 必然事件Ω及不可能事件∅与任何事件都独立.

② “相互独立”与“互不相容”是无关的两个概念.

§1.4 条件概率 事件的独立性

案例6 有a只黑球，b只白球．每次随机从中取出一球，取后放回．求：

1. 在已知第一次摸得黑球的条件下，第二次摸出黑球的概率．
2. 第二次摸出黑球的概率．

解 记 A={第一次取出黑球},B={ 第二次取出黑球 }.则

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{a^2/(a+b)^2}{a/(a+b)}=\frac{a}{a+b}$$

$$P(B)=P(AB)+P(\bar{A}B)=\frac{a^2}{(a+b)^2}+\frac{ab}{(a+b)^2}=\frac{a}{a+b}$$

§1.4 条件概率 事件的独立性

案例7 有a只黑球，b只白球．每次随机从中取出一球，取后不放回．求：

1. 在已知第一次摸得黑球的条件下，第二次摸出黑球的概率．
2. 第二次摸出黑球的概率．

解 记 A={第一次取出黑球}，B={ 第二次取出黑球 }．则

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{a(a-1)/[(a+b)(a+b-1)]}{a/(a+b)}=\frac{a-1}{a+b-1}$$

$$P(B)=P(AB)+P(\bar{A}B)=\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}+\frac{ab}{(a+b)(a+b-1)}$$

$$=\frac{a}{a+b}$$

§1.4 条件概率 事件的独立性

1.4.4 事件的独立性

定义 （多个事件独立性）： 对于三个事件A, B, C, 若下列四个等式同时成立，则称它们**相互独立**.

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

$$P(BC)=P(B)P(C)$$

$$P(AC)=P(A)P(C)$$

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$$

若只满足前面三式，称A, B, C**两两独立**.

§1.4 条件概率 事件的独立性

1.4.4 事件的独立性

定义 （三个事件独立性）对于三个事件A, B, C，若下列四个等式同时成立，则称它们**相互独立**.

$$\left.\begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B) \\ P(BC) &= P(B)P(C) \\ P(AC) &= P(A)P(C) \end{aligned}\right. \qquad (1)$$

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \qquad (2)$$

若只满足前面三式，称A, B, C**两两独立**.

§1.4 条件概率 事件的独立性

问题1：两两独立 $\Leftrightarrow$ 相互独立？

案例8 （伯恩斯坦反例） 一个均匀的正四面体，其第一面染成红色，第二面染成白色，第三面染成黑色，而第四面同时染上红，白，黑三种颜色. 现在以 A,B,C 分别记投一次四面体出现红，白，黑颜色朝下的事件，则由于在四面体中有两面有红色，因此

$$P(A)=\frac{1}{2}$$

同理 $P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$，容易算出

$$P(AB)=P(BC)=P(AC)=\frac{1}{4}$$

所以公式（1）成立，即 A,B,C 两两独立，但是

$$P(ABC)=\frac{1}{4}\neq\frac{1}{8}=P(A)P(B)P(C)$$

因此公式（2）不成立，从而 A,B,C 不相互独立.

§1.4 条件概率 事件的独立性

问题2：公式2 $\Rightarrow$ 公式1 ？

案例9 若有一个均匀正八面体，其第 1,2,3,4 面染红色，第 1,2,3,5 面染白色，第 1,6,7,8 面染上黑色，现在以 A,B,C 分别表示投一次正八面体出现红，白，黑的事件，则

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

$$P(ABC)=\frac{1}{8}=P(A)P(B)P(C)$$

但是

$$P(AB)=\frac{3}{8}\neq\frac{1}{4}=P(A)P(B)$$

§1.4 条件概率 事件的独立性

定义（事件独立性）对 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，若对于所有可能的组合 $1\leqslant i<j<k<\cdots\leqslant n$ 成立着

$$\left.\begin{aligned}&P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)\\&P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k)\\&\cdots\cdots\\&P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)\end{aligned}\right\}$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$**相互独立.**

这里第一行有$\binom{n}{2}$个式子，第二行有$\binom{n}{3}$个式子等等，因此共应满足

$$\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n-n-1$$

个等式. 由三个事件的场合可看出同时满足这些关系式是必须的.

§1.4 条件概率 事件的独立性

推论： 设n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$是相互独立的，则其中任意m个事件$A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_m}$也是相互独立的，其中，$1 \leqslant m \leqslant n$，而$i_1, i_2 \cdots i_m$是1, 2, …, n的一个选排列.

注意： 1. 对于对立事件也成立

2. 称无穷多个事件相互独立，如果其中任意有限多个事件都相互独立.

§1.4 条件概率 事件的独立性

问题3：相互独立事件至少发生其一的概率的计算

若n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$是相互独立的，则由于

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_n,$$

因此，

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_n)$$

$$= 1 - P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) \cdots P(\bar{A}_n)$$

§1.4 条件概率 事件的独立性

案例10 假若每个人的血清中含有肝炎病毒的概率为0.4%，混合100个人的血清，求此血清中含有肝炎病毒的概率.

解 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{100})$

$$=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_{100}}) \quad =1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\cdots P(\overline{A_n})$$

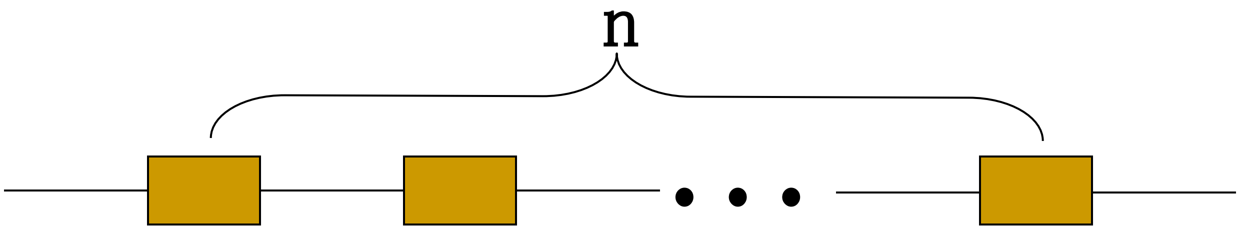
$$=1-(1-0.004)^{100}=1-0.996^{100}\approx 0.33$$

§1.4 条件概率 事件的独立性

问题3：相互独立事件至少发生其一的概率的计算

对于一个元件，它能正常工作的概率p，称为它的**可靠性**. 元件组成系统，系统正常工作的概率称为该系统的可靠性.

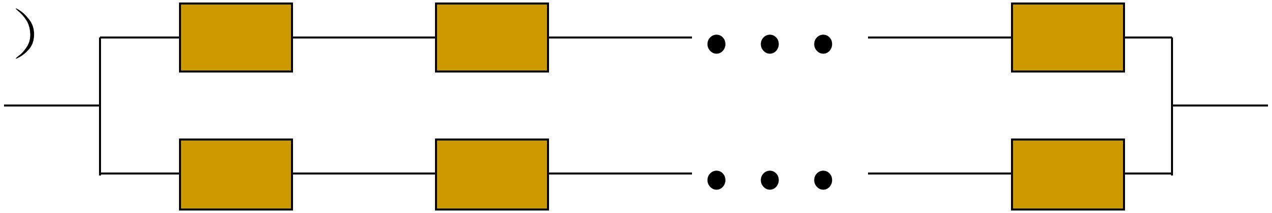
如果构成系统的每个元件的可靠性均为r，0<r<1. 且各元件能否正常工作是相互独立的，试求下列系统的可靠性：



r^n

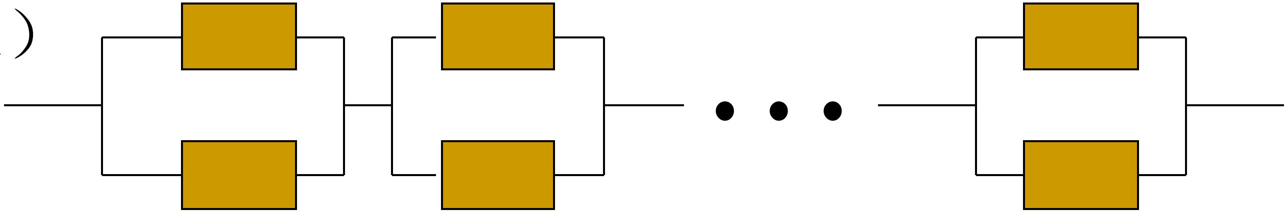
§1.4 条件概率 事件的独立性

甲）



$r^n(2-r^n)$

乙）



$r^n(2-r)^n$

$$P(G_1)=P(G_2)=r^n,$$

$$R_{甲}=1-P(\bar{G}_1\bar{G}_2)=1-(1-r^n)^2=r^n(2-r^n),$$

$$or\ \ R_{甲}=P(G_1\cup G_2)=P(G_1)+P(G_2)-P(G_1G_2)=2r^n-r^{2n},$$

$$R_{乙}=(2r-r^2)(2r-r^2)\cdots(2r-r^2)=(2r-r^2)^n=r^n(2-r)^n.$$

§1.4 条件概率 事件的独立性

由于当 $n \geq 2$时，总有 $(2-r)^n > 2-r^n$

所以，$R_{甲} < R_{乙}$，即乙系统比甲系统可靠.

§1.4 条件概率 事件的独立性

1.4.5 试验的独立性

所谓试验相互独立，就是其中一试验所得到的结果，对其它各试验取得其可能结果的概率都没有影响.

若试验E_1的任一结果与试验E_2的任一结果都是相互独立的事件，则称这两个试验相互独立，或称独立试验.

§1.4 条件概率 事件的独立性

1.4.5 试验的独立性

设试验E_1的样本空间是 $\Omega_1=\{\omega^{(1)}\}$，试验$E_2$的样本空间是 $\Omega_2=\{\omega^{(2)}\}$ ，… E_n的样本空间是 $\Omega_n=\{\omega^{(n)}\}$，为了描述这n次试验，应构造复合试验E，它表示依次进行试验E_1, E_2, …E_n, 其样本点为

$$\omega=\{\omega^{(1)},\ \omega^{(2)},\ \cdots,\ \omega^{(n)}\}$$

这样的样本空间记作

$$\Omega=\Omega_1\times\Omega_2\times\cdots\times\Omega_n$$

§1.4 条件概率 事件的独立性

案例11 若试验E_1是掷一枚硬币，Ω_1={正，反}，试验E_2是从装有红白黑三球的袋子中摸出一球，Ω_2={红，白，黑}，则复合试验E表示先掷一枚硬币再摸一球，它相应的样本空间：

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$$

由下列6个样本点构成：（正，红），（正，白），（正，黑），（反，红），（反，白），（反，黑）。

§1.4 条件概率 事件的独立性

在许多问题中，人们往往关心实验中某一事件A是否发生.

例如:

1. 在产品质量抽样检测中是否抽到次品;
2. 在掷硬币试验中是否出现正面;
3. 在股票市场中股票是涨还是跌等。

在这类问题中,我们可把事件域取为

$$\mathrm{F} = \{\varnothing, A, \bar{A}, \Omega\},$$

并称试验出现事件A为“成功”,反之称为“失败”.这种只有两个结果的试验为伯努利(Bernoulli)试验.

§1.4 条件概率 事件的独立性

具体地，如果随机试验E只有两个结果：A和A，其中，P(A)=p，P(A)=q，(p+q=1，p>0，q>0)， 则称E为**伯努利试验**.

n重伯努利试验：n次独立重复的伯努利试验， 记作E_n，其特点是：

① 每次试验最多出现两个可能结果；

② A在每次试验种出现的概率p保持不变；

③ 各次试验相互独立；

④ 共进行了n次试验.

§1.4 条件概率 事件的独立性

n 重伯努利试验的样本点$w=(w_1,w_2,\dots,w_n)$， $w_i=A$ 或 $\bar{A}$ ，表示第i次试验是A是否发生. n重独立重复的伯努里试验共有2^n个样本点.

样本点，$(A_1,A_2,\dots,A_{n-1},\bar{A}_n)$ ，可简记做 $A_1A_2\dots A_{n-1}\bar{A}_n$ 其出现的概率为：

$$P(A_1A_2\dots A_{n-1}\bar{A}_n)=pp\dots pq=p^nq.$$

§1.4 条件概率 事件的独立性

伯努利试验是一种非常重要的概率模型，它是“在同样条件下进行重复试验”的一种数学模型，特别在讨论某事件出现的频率时常用这种模型.

在历史上，伯努利概型是概率论中最早研究的模型之一，也是得到最多研究的模型之一，在理论上具有重要的意义.

另一方面，它有着广泛的应用，在我们这门课程中，一些较为深入的结果也是结合伯努利概型进行讨论的.

§1.4 条件概率 事件的独立性

伯努利试验是一种非常重要的概率模型，它是“在同样条件下进行重复试验”的一种数学模型，特别在讨论某事件出现的频率时常用这种模型.

在历史上，伯努利概型是概率论中最早研究的模型之一，也是得到最多研究的模型之一，在理论上具有重要的意义.

另一方面，它有着广泛的应用，在我们这门课程中，一些较为深入的结果也是结合伯努利概型进行讨论的.

§1.4 条件概率 事件的独立性

独立重复伯努利试验中的三个重要问题：

(1) n 次试验中A 恰好发生 k 次的概率是多少？

(2) 到第 k 次试验 A才首次发生的概率是多少？

(3) 一直不停试验，A最终发生的概率是多少？

本章主要内容

1.1 随机事件及运算

1.2 概率及性质

1.3 古典概型和几何概型

1.4 条件概率 事件的独立性

谢谢大家！